**Théorèmes – Réductions géométriques**

**Sommes directe d’une famille de sev**

Soit

Définition : (Somme de sev)

Soient des sev de . On appelle somme des sev l’ensemble :

Propriété :

Soient des sev de , alors est un sev de .

Définition : (Somme directe de sev)

Soient des sev de . On dit que la somme est directe si :

Autrement dit, il y a unicité de la décomposition.

On note alors ou

Propriété : (Unique décomposition en somme directe)

Soient des sev de . Alors

Les sev sont en somme directe

Propriété : Intersection des sev en somme directe

Soient des sev de . Si est en somme directe, alors :

Propriété : (Dimension des sev en somme directe)

Soit un -ev de dimension finie. Soient des sev de . On a :

La somme est directe

Théorème : (Bases de sev en somme directe)

Soient un -ev de dimension finie et des sev de . On a :

Pour toutes bases respectives de ,

forme une base de

Définition : (Base adaptée)

Soit des sev de tq

On appelle base adaptée à la décomposition toute base de obtenue par concaténation de bases respectives de , ie toute base de la forme où

est une base de .

**Sous-espaces stables**

Définition : (Sous-espace stable)

Un sev de est dit stable par si

Propriété : (Inter & Union stables)

Soient et deux sev de stables par . Alors et sont aussi stables par .

Propriété : (Stabilité des images et noyaux)

Soient , tels que . Alors et sont stables par .

Définition : (Endomorphismes induite)

Soient et un sev de stable par . On définit l’endomorphisme induit par sur par :

Propriété : (Combinaisons linéaires d’endomorphismes stables)

Soient et un sev de stable par ET . Alors est stable par

De plus, ,

Propriété : Soient , un sev de stable de . Alors ,

Corollaire : Soient et un sev de stable par . Si est injectif, l’est aussi.

**Version matricielle en dimension finie**

Soit un -ev,

Théorème : Soit un sev de de dimension , et une base de . On complète en une base de .

On a équivalence entre :

1. est stable par
2. La matrice de dans est de la forme

Si c’est le cas,

Propriété : Soient des sev de tq . Soit une base adaptée à la décomposition .

Soit . On a équivalence entre :

1. est stable par
2. La matrice de dans est de la forme :

De plus, si c’est le cas,

**Éléments propres**

On considère un -ev non réduit à , et .

**Valeurs propres, vecteurs propres**

Définition : est un vecteur propre de si et tel que .

Dans ce cas, il y a unicité de

Le scalaire est appelé valeur propre à laquelle est associée le vecteur propre .

Définition : On appelle valeur propre tout tel que

Définition : L’ensemble des valeurs propres de est appelé spectre de , noté .

**Sous-espace propre**

Définition :

Pour , on note l’espace formé des vecteurs solutions de .

Propriété :

Soit . On a équivalence entre :

1. non injectif

Définition : (Sous-espace propre)

Soit . Si est une valeur propre de , le sev est appelé sous-espace propre de associé à .

**Stabilité et somme directe des sous-espaces propres**

Propriété : Les sous-espaces propres de sont stables par et ,

Propriété : Si , avec , alors les sous-espaces propres de sont stables par .

Théorème : Des sous-espaces propres de associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes de sont en somme directe, c’est-à-dire si , avec alors est en somme directe.

Corollaire : Une famille de vecteurs propres de associés à des valeurs propres de 2 à 2 distinctes est libre.

Corollaire : Si est de dimension finie, , alors admet au plus valeurs propres distinctes.

**Éléments propres en dimension finie**

Dans cette partie est un -ev de dimension finie , .

**Éléments propres d’une matrice carrée**

Définition : Soit . On dit que est une valeur propre de si , et

On dit que est un vecteur propre de , associé à la valeur propre . L’ensemble des valeurs propres de est appelé spectre de noté .

Définition : Soit On note le sev formé des éléments

Corollaire : Soient semblables, alors .

**Polynôme caractéristique d’une matrice carrée**

Soit

La matrice

Où

Définition : (Polynôme caractéristique)

Soit , on appelle polynôme caractéristique de noté

Théorème :

Le polynôme caractéristique de a pour coefficient dominant et est de degré . Il possède les coefficients suivants :

Théorème : Soit . On a équivalence entre :

1. est valeur de propre de
2. est racine de

Corollaire :

1. Si , possède au plus valeurs propres distinctes dans .
2. Si alors possède au moins une valeur propre complexe.

Propriété : Soit un polynôme unitaire de degré La matrice compagnon de est

Le polynôme caractéristique de est .

**Polynôme caractéristique d’un endomorphisme**

Propriété : Soient , 2 matrices semblables. Alors

Définition : On appelle polynôme caractéristique commun aux matrices représentant , ie est le polynôme caractéristique de la matrice de dans n’importe quelle base de .

Théorème : Pour , , le polynôme caractéristique de est unitaire, de degré , et est de la forme :

Corollaire : Si , , possède valeurs propres distinctes (dans ).

Corollaire : Tout endomorphisme d’un -ev de dimension finie non nulle admet au moins une valeur propre complexe.

**Multiplicité d’une valeur propre**

Définition : Un polynôme non constant est dit scindé sur si :

Lorsque les sont 2 à 2 différents, on dit que est scindé à valeurs simples sur .

Définition : (Multiplicité algébrique)

Soit , et soit une valeur propre de . On appelle multiplicité algébrique de l’ordre de multiplicité de en tant que racine de .

On appelle multiplicité géométrique de la dimension de l’espace propre associé à , c’est-à-dire .

Propriété : Pour tout ,

Si égalité, alors est scindé sur .

Corollaire : Un endomorphisme possède au plus valeurs propres comptées avec multiplicité algébrique, où .

Corollaire : Si est un -ev de dimension , tout endomorphisme possède exactement valeurs propres (dans ) comptées avec multiplicité algébrique.

Théorème : Soit et un sev de , , stable par , alors le polynôme caractéristique de l’endomorphisme induit par sur divise le polynôme caractéristique de , ie :

Théorème : Soit . Pour , on a :

**Diagonalisabilité**

(-ev)

Définition : un endomorphisme est diagonalisable s’il existe une base telle que est diagonale. est appelée base de diagonalisation.

Théorème : Soit . On a :

est diagonalisable

Il existe une base de formée de vecteurs propres de

Théorème : Soit . On a équivalence entre :

1. diagonalisable
2. est scindé sur et ,

Corollaire : Si possède valeurs propres distinctes, alors est diagonalisable.

**Matrice diagonalisable**

Pour , notons

Définition : (Matrice diagonalisable)

Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Propriété : Soit et une base de . Notons .

On a équivalence entre :

1. est diagonalisable
2. est diagonalisable

Théorème :

Soit . On a équivalence entre :

1. est diagonalisable (dans )
2. est scindé sur et ,

De plus, dans le cas où est diagonalisable, les matrices diagonales semblables à sont les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de comptées avec multiplicité algébrique.

Corollaire : Soit . Si admet valeurs propres (dans 2 à 2 distinctes, alors est diagonalisable.

**Trigonalisabilité**

est un -ev,

**Endomorphismes et matrices trigonalisables :**

Définition : (endomorphisme trigonalisable)

On dit que est trigonalisable, s’il existe une base de dans laquelle la matrice de est triangulaire supérieure ou inférieure.

Propriété :

Soient une base de et . On a équivalence entre :

1. La base B trigonalise l'endomorphisme .
2. est stable par .

Définition : (Matrice trigonalisable)

Une matrice est dite trigonalisable dans si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure/inférieure.

Propriété :

Soient et une base de . Notons , alors sont équivalents

1. est trigonalisable
2. est trigonalisable (dans )

Théorème :

Pour , on a équivalence entre :

1. est trigonalisable
2. Le polynôme caractéristique est scindé sur . De même pour .

Corollaire :

Soit . Si est scindé sur , alors :

**Nilpotence**

Définition : (endomorphisme nilpotent)

Un endomorphisme est dit nilpotent si tel que . Le plus petit tel est appelé indice de nilpotence de .

Définition : (Matrice nilpotente)

Soit . On dit que est nilpotente s’il existe tel que . Le plus petit tel est appelé indice de nilpotence de .

Théorème :

Soit un -ev de dimension finie et . On a équivalence entre :

1. est nilpotent
2. Il existe une base de dans laquelle la matrice de est triangulaire stricte
3. Le polynôme caractéristique de est .

Propriété :

Soit . On a équivalence entre :

1. est nilpotente
2. est semblable à une matrice triangulaire stricte

Corollaire :

Soit nilpotent avec un -ev de dimension finie . Alors l’indice de nilpotence de est inférieur ou égal à , ie

De même, si est nilpotente, alors son indice de nilpotence vérifie , ie