**Théorèmes – Réductions géométriques**

**Sommes directe d’une famille de sev**

Soit

Définition : (Somme de sev)

Soient des sev de . On appelle somme des sev l’ensemble :

Propriété :

Soient des sev de , alors est un sev de .

Définition : (Somme directe de sev)

Soient des sev de . On dit que la somme est directe si :

Autrement dit, il y a unicité de la décomposition.

On note alors ou

Propriété : (Unique décomposition en somme directe)

Soient des sev de . Alors

Les sev sont en somme directe

Propriété : Intersection des sev en somme directe

Soient des sev de . Si est en somme directe, alors :

Propriété : (Dimension des sev en somme directe)

Soit un -ev de dimension finie. Soient des sev de . On a :

La somme est directe

Théorème : (Bases de sev en somme directe)

Soient un -ev de dimension finie et des sev de . On a :

Pour toutes bases respectives de ,

forme une base de

Définition : (Base adaptée)

Soit des sev de tq

On appelle base adaptée à la décomposition toute base de obtenue par concaténation de bases respectives de , ie toute base de la forme où

est une base de .

**Sous-espaces stables**

Définition : (Sous-espace stable)

Un sev de est dit stable par si

Propriété : (Inter & Union stables)

Soient et deux sev de stables par . Alors et sont aussi stables par .

Propriété : (Stabilité des images et noyaux)

Soient , tels que . Alors et sont stables par .

Définition : (Endomorphismes induite)

Soient et un sev de stable par . On définit l’endomorphisme induit par sur par :

Propriété : (Combinaisons linéaires d’endomorphismes stables)

Soient et un sev de stable par ET . Alors est stable par

De plus, ,

Propriété : Soient , un sev de stable de . Alors ,

Corollaire : Soient et un sev de stable par . Si est injectif, l’est aussi.

**Version matricielle en dimension finie**

Soit un -ev,

Théorème : Soit un sev de de dimension , et une base de . On complète en une base de .

On a équivalence entre :

1. est stable par
2. La matrice de dans est de la forme

Si c’est le cas,

Propriété : Soient des sev de tq . Soit une base adaptée à la décomposition .

Soit . On a équivalence entre :

1. est stable par
2. La matrice de dans est de la forme :

De plus, si c’est le cas,

**Éléments propres**

On considère un -ev non réduit à , et .

**Valeurs propres, vecteurs propres**

Définition : est un vecteur propre de si et tel que .

Dans ce cas, il y a unicité de

Le scalaire est appelé valeur propre à laquelle est associée le vecteur propre .

Définition : On appelle valeur propre tout tel que

Définition : L’ensemble des valeurs propres de est appelé spectre de , noté .

**Sous-espace propre**

Définition :

Pour , on note l’espace formé des vecteurs solutions de .

Propriété :

Soit . On a équivalence entre :

1. non injectif

Définition : (Sous-espace propre)

Soit . Si est une valeur propre de , le sev est appelé sous-espace propre de associé à .

**Stabilité et somme directe des sous-espaces propres**

Propriété : Les sous-espaces propres de sont stables par et ,

Propriété : Si , avec , alors les sous-espaces propres de sont stables par .

Théorème : Des sous-espaces propres de associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes de sont en somme directe, c’est-à-dire si , avec alors est en somme directe.

Corollaire : Une famille de vecteurs propres de associés à des valeurs propres de 2 à 2 distinctes est libre.

Corollaire : Si est de dimension finie, , alors admet au plus valeurs propres distinctes.

**Éléments propres en dimension finie**

Dans cette partie est un -ev de dimension finie , .

**Éléments propres d’une matrice carrée**

Définition : Soit . On dit que est une valeur propre de si , et

On dit que est un vecteur propre de , associé à la valeur propre . L’ensemble des valeurs propres de est appelé spectre de noté .

Définition : Soit On note le sev formé des éléments

Corollaire : Soient semblables, alors .

**Polynôme caractéristique d’une matrice carrée**

Soit

La matrice

Où

Définition : (Polynôme caractéristique)

Soit , on appelle polynôme caractéristique de noté

Théorème :

Le polynôme caractéristique de a pour coefficient dominant et est de degré . Il possède les coefficients suivants :

Théorème : Soit . On a équivalence entre :

1. est valeur de propre de
2. est racine de

Corollaire :

1. Si , possède au plus valeurs propres distinctes dans .
2. Si alors possède au moins une valeur propre complexe.

Propriété : Soit un polynôme unitaire de degré La matrice compagnon de est

Le polynôme caractéristique de est .

**Polynôme caractéristique d’un endomorphisme**

Propriété : Soient , 2 matrices semblables. Alors

Définition : On appelle polynôme caractéristique commun aux matrices représentant , ie est le polynôme caractéristique de la matrice de dans n’importe quelle base de .

Théorème : Pour , , le polynôme caractéristique de est unitaire, de degré , et est de la forme :

Corollaire : Si , , possède valeurs propres distinctes (dans ).

Corollaire : Tout endomorphisme d’un -ev de dimension finie non nulle admet au moins une valeur propre complexe.